

Matemática Discreta

1. [0.5] ¿Es cierto que para todo conjunto  $A$  se cumple  $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(A)$ ? Razona la respuesta.

**Solución:** Es falso. Contraejemplo:  $A = \{1\}$ . Entonces  $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$ , y  $\{\emptyset\} \notin \mathcal{P}(A)$  (lo que sí se cumple es  $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$  y  $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ ).

2. [2 puntos] Consideramos la función  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x = 0 \text{ o } x = 1 \\ 4f\left(\frac{x-2}{2}\right) + 4x - 4 & \text{si } x > 1, x \text{ par} \\ f(x-1) + 2x - 1 & \text{si } x > 1, x \text{ impar} \end{cases}$$

- a) [1.5] Prueba por inducción que  $f(x) = x^2$  para todo  $x \in \mathbb{N}$ .

**Solución**

Usamos inducción completa con 2 casos base.

- Caso base 1.  $x=0$ . Entonces  $f(0) = 0$ , y  $x^2 = 0$ , por lo que  $f(0) = 0^2$ .
- Caso base 2.  $x=1$ . Entonces  $f(1) = 1$ , y  $1^2 = 1$ , por lo que  $f(1) = 1^2$ .
- Caso inductivo,  $x > 1$ . Hipótesis de inducción:  $f(y) = y^2$  para todo  $y \in \mathcal{N}$  tal que  $y < x$ .

Distinguimos 2 casos

- $x$  par. En este caso llamando  $y = \frac{x-2}{2}$  se tiene que  $f(x) = 4f(y) - 4x + 4$ . Ahora bien:
  - $y \in \mathbb{N}$ , ya que si  $x$  es par,  $x > 1$ , entonces  $x - 2 \geq 0$  y también par, por lo que  $\frac{x-2}{2} \in \mathbb{N}$ .
  - $y < x$ . No hace falta comprobarlo (al restar 2 a un número par se obtiene otro número más pequeño, y al dividirlo entre 2 obviamente otro más pequeño) (de todas formas es fácil de probar).

Por tanto se puede aplicar la hipótesis de inducción a  $f(y)$ , y por tanto  $f(y) = y^2$ , es decir  $f(y) = \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 = \frac{x^2-4x+4}{4}$ , y  $f(x) = 4\frac{x^2-4x+4}{4} + 4x - 4 = x^2$  como queríamos probar.

- $x$  impar. Entonces  $f(x) = f(x-1) + 2x - 1$ . Por ser  $x > 1$   $x-1 \in \mathbb{N}$  y obviamente  $x-1 < x$ , por lo que se puede aplicar la hipótesis de inducción y  $f(x-1) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ . Por tanto  $f(x) = f(x-1) + 2x - 1 = x^2$ , lo que concluye la demostración.

- b) [0.5] ¿Es  $f$  una función biyectiva? Razona la respuesta.

**Solución**

No lo es por no ser suprayectiva. Por ejemplo no existe ningún valor  $x$  tal que  $f(x) = 3$ , ya que por el apartado anterior debería ser  $x = \sqrt{3}$  que evidentemente no es un número natural.

3. [1] En  $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$  se define la relación

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a - d \text{ es múltiplo de } 5$$

¿Es  $R$  de equivalencia? Razona tu respuesta.

**Solución**

No es de equivalencia por no ser ni siquiera reflexiva. Por ejemplo  $(1,3)$  no está relacionado consigo mismo ya que  $1 - 3 = -2$  no es múltiplo de 5.

4. [3.5] En  $\mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}_2$  se define la relación

$$xRy \Leftrightarrow x \leq y, p_x \leq p_y, \text{ con } p_x = \text{mayor factor primo de } x, p_y = \text{mayor factor primo de } y$$

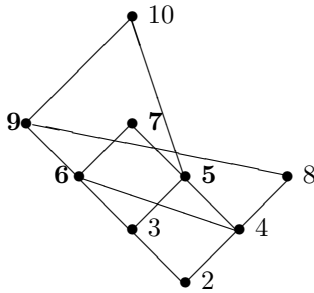
a) [1] Prueba que  $R$  es una relación de orden.

**Solución**

- Reflexiva. Se cumple  $xRx$  porque  $x \leq x$  y  $p_1 \leq p_1$  por ser  $\leq$  un orden y por tanto reflexivo.
- Antisimétrica. Si  $xRy$ ,  $yRx$  entonces  $x \leq y$  y  $p_1 \leq p_2$ , y al mismo tiempo  $y \leq x$  y  $p_2 \leq p_1$ . De  $x \leq y$ ,  $y \leq x$  se tiene  $x = y$  por ser  $\leq$  un orden y por tanto antisimétrico.
- Transitiva. Análogo al anterior, se deduce de ser  $\leq$  un orden y por tanto transitivo.

b) [1] Dibuja el diagrama de Hasse para la relación sobre el conjunto  $A = \{x \in \mathbb{N}_2 \mid 2 \leq x \leq 10\}$ .

**Solución**



c) [1.5] Consideramos el subconjunto  $S = \{5, 6, 7, 9\}$  de  $A$ . A partir del diagrama anterior encuentra (si existen) el máximo, el mínimo, los elementos maximales y minimales, las cotas superiores e inferiores y el supremo e ínfimo.

Nota:  $\mathbb{N}_2 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 2\}$ .

**Solución**

- Cotas inferiores:  $\{2, 3, 4\}$
- Ínfimo: No hay
- Cotas superiores: No hay (ningún elemento es mayor o igual que el 7 excepto si mismo, y el 7 no es mayor que el 6, por ejemplo).
- Supremo: No hay
- Maximales:  $\{7, 9\}$
- Máximo: No hay.
- Minimales:  $\{5, 6\}$
- Mínimo: No hay.

5. [1.5] Por el recinto universitario de la ciudad de Discretona, pasan 4 autobuses: el F, el G, el H y el I. Calcular el número de paradas de autobuses que hay en el recinto sabiendo que:

- El F para en todas las paradas.
- El G para en 10 paradas, el H en 5 y el I sólo en 2.
- Hay una parada en la que paran 3 autobuses y 4 paradas en las que sólo para un autobús. En el resto paran 2 autobuses.

**Solución:** Si llamamos  $B$  al conjunto de los autobuses y  $P$  al de las paradas podemos definir la relación  $R \subseteq B \times P$  tal que  $(b, p) \in R \Leftrightarrow b$  para en  $p$ .

Ahora contamos el número de elementos en  $R$ ,  $|R|$ , tanto por filas como por columnas, llamando  $N$  al número de paradas:

Por filas:

$$N \text{ (paradas del F)} + 10 \text{ (paradas del G)} + 5 \text{ (paradas del H)} + 2 \text{ (paradas del I)} = |R|$$

Por columnas:

$$3 \times 1 \text{ (parada con 3 buses)} + 4 \text{ (paradas con 1)} + 2(N - 5) \text{ (paradas con 2 buses: todas menos 1+4)} = |R|$$

Es decir tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} N + 10 + 5 + 2 &= |R| \\ 3 + 4 + 2N - 10 &= |R| \end{aligned}$$

y de aquí se obtiene

$$\begin{aligned} N + 17 &= |R| \\ 2N - 3 &= |R| \end{aligned}$$

de donde  $N = 20$ , es decir hay 20 paradas de autobús.

6. [1.5 ] Considera los grafos no dirigidos  $G_1, G_2$ , con

- $G_1 = (V_1, A_1)$ , con  $V_1 = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ,  $A_1 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{a, f\}, \{e, g\}, \{f, g\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{c, e\}\}$
- $G_2 = (V_2, A_2)$ , con  $V_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $A_2 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 7\}\}$

Contesta razonadamente

a) [0.5 ] ¿Es  $G_1$  euleriano? Si sí lo es encuentra un recorrido euleriano.

**Solución**

No es euleriano porque tiene vértices como por ejemplo  $e$  con grado impar.

b) [0.5 ] ¿Es  $G_1$  bipartito? Si sí lo es encuentra una partición de vértices que lo pruebe.

**Solución**

No es bipartito porque tiene un ciclo  $e$ - $c$ - $a$  de longitud impar.

c) [0.5 ] ¿Son  $G_1$  y  $G_2$  isomorfos?

**Solución**

No lo son, porque  $G_1$  tiene un ciclo de longitud 3 mientras que  $G_2$  no.